11.04.16

Ασκ. 3, 4 / σελ. 364
Ασκ. 1, 3 / σελ. 407

$f: (\overset{x,y}{E_1}, \rho_1) \to (\overset{f(x),f(y)}{E_2}, \rho_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ f ομοιόμορφα συνεχής στο E_1
$\iff \begin{cases} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ \forall x,y \in E_1, \text{ όπου } \rho_1(x,y)<\delta \\ \Rightarrow \rho_2(f(x),f(y))<\varepsilon \end{cases}$

Παρατήρηση: f ομοιόμορφα συνεχής στο E_1
$\Rightarrow f$ συνεχής στο E_1 (σε κάθε σημείο του E_1)

Σταθεροποιούμε ένα $y \in E_1$, $y = y_0$
f συνεχής στο x_0, $\varepsilon>0$, $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$

Σκέψη της απόδειξης

Θδο. f συνεχής στο $E_1 \not\Rightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής στο E_1

Πριν τ' αποδείξουμε, θα δούμε ένα λήμμα:

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Ομοιόμορφα συνεχής)

$f: (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$. Τότε:

f ομοιόμορφα συνεχής $\underset{(*)}{\iff} \begin{cases} \forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq E_1, \\ \rho_1(x_n,y_n) \to 0 \Rightarrow \rho_2(f(x_n), f(y_n)) \to 0 \end{cases}$

στο μοντέλο μας έχουμε
$(|x_n-y_n| \to 0 \Rightarrow |f(x_n)-f(y_n)| \to 0)$

Απόδειξη
($\Longrightarrow$)

Έστω f ομοιόμορφα συνεχής, δηλ.
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ αν $\rho(x,y)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ (1)

Έστω $\boxed{\rho_1(x_1, y_1) \to 0}$ (2). Θ.δ.ο. $\underbrace{\rho_2(f(x_1), f(y_1))}_{\in \mathbb{R}} \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο. Θ.δ.ο. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$: $\boxed{\rho_2(f(x_1), f(y_1)) < \varepsilon}$ (3)

Βρίσκουμε το δ από την (1).

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\rho_1(x_1, y_1) < \delta$, $\forall n \geq n_0$

$(1) \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(y_1)) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$(\Leftarrow)$

Έστω ισχύει το $(*)$. Θ.δ.ο. f ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω ότι η f όχι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x_\delta, y_\delta \in E_1 : \rho_1(x, y) < \delta$ και $\rho_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$, (2)

Εφαρμόζω στην (2), $\delta = \frac{1}{n}$ και βρίσκω:

$x_n, y_n \in E_1 : 0 \leq \rho_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ και $\rho_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$

$\rho_1(x_n, y_n) \to 0$, $\rho_2(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$

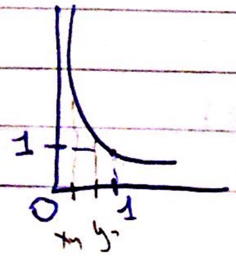
$\xrightarrow{(*)}$ ↯

Παράδειγμα: f ομοιομ. συνεχής

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$, $f : ((0,1), |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θα βρούμε δύο $x_n, y_n \subseteq (0,1)$, $|x_n - y_n| \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$



$0 < x_n < y_n$

$y_n \to 0$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = \frac{|y_n - x_n|}{x_n y_n} = \frac{1}{y_n} \left| \frac{y_n}{x_n} - 1 \right|$$

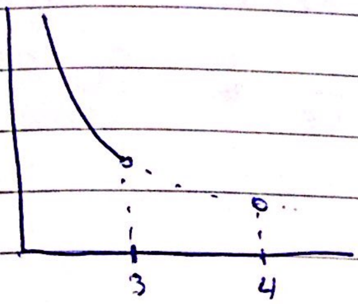
Διαλέγω $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n = \frac{1}{2n}$

$y_n - x_n = \frac{1}{2n} \to 0$

ΣΚΕΨΗ:
αν για τα $\frac{y_n}{x_n} =$
1 ( ) δεν προλαβα

Αργότερα, θδο:
αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχής στο $[a,b]$

Παίρνουμε πάλι την $f(x) = \frac{1}{x}$ αλλά παίρνουμε άλλο π.ο.



$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [3,4]$

$f : [3,4] \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής (γιατί?)

$3 < x < y < 4$

3 x y 4

ΘΜΤ:

$$\underbrace{|f(x) - f(x)| = |f'(\xi)|\,|(y-x)| \leq \frac{|x-y|}{9}}_{(1)}$$ για κάποιο $\xi \in (x,y)$

3 x ξ y 4

$3 < x < \xi < y < 4$

$$|f'(\xi)| = \left| -\frac{1}{\xi^2} \right| = \frac{1}{\xi^2} \leq \frac{1}{9}$$

$\forall x_1, y_1 \in [3,4]$ ώστε $|x_1 - y_1| \to 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x_1) - f(y_1)| \to 0$

$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$, $\forall x,y$, $M > 0$

Αυτές οι f ονομάζονται Lipschitz

Επιπλέον, για $M < 1$ λέγονται συστολή

f : Lipshitz : $f(E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$

αν : $\exists M > 0 : \rho_2(f(x), f(y)) \leq M \rho_1(x, y)$

$\forall x, y \in E_1$

(Από αρχή μεταφοράς $\Rightarrow$ Lipshitz $\Rightarrow$ Ομοιομ. συνεχεια)

$(E_1, \rho_1), \dots, (E_n, \rho_n)$

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$$

$$(E, \rho), \quad \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 (x_i, y_i)}$$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i, y_i \in E$

$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$P : E = \prod_{i=1}^{n} E_i \to E_1$$

$P(\bar{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = x_1$, προβολή στην 1η συντεταγμένη

$x_i \in E_2$, $\boxed{\bar{x}, \bar{y} \in E}$

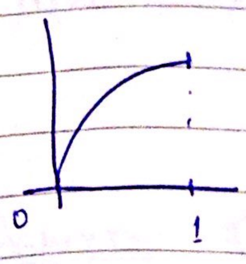
Ψάχνουμε το $M > 0$

$$\rho_1(\underbrace{P(\bar{x})}_{x_i}, \underbrace{P(\bar{y})}_{y_i}) \leq M \rho(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\rho_1(x_1, y_1) \leq M \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n, y_n)}$$

Άρα η P είναι Lipschitz.

• $f(x) = \sqrt{x}$
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (όντως ομοιομ. συνεχής)



Θ.δ.ο. <u>δεν</u> είναι Lipschitz.

Αν ήταν Lip. : $\exists M>0 : |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$
$\forall x,y \in [0,1]$

$|\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}| \leq M|x-y| = M|\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|$

$\underline{x \neq y}$, $M(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \geq 1 \quad \forall x,y,\ x\neq y,\ x,y \in [0,1]$

αφού για $x=y$ δεν έχω κάτι να αποδείξω

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \frac{1}{M}$ (?)

$$f : (E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2) \xrightarrow{g} (E_3,\rho_3), \quad g\circ f : (E_1,\rho_1) \to (E_3,\rho_3)$$

Αν f, g ομοιομ. συνεχής $\Rightarrow g\circ f$ ομοιομ. συνεχή στο E_1
$\quad\ \ E_1 \quad E_2$

$\forall x_1, y_1 \in E_1 \qquad (1)\ \rho_1(x_n,y_n) \to 0 \qquad$ θ.δ.ο. $\rho_3(g\circ f(x_n), g\circ f(y_n)) \to 0$

$(1) \xrightarrow{f \text{ ομ. συν}} \rho_2(f(x_n), f(y_n)) \to 0 \xrightarrow{g \text{ ομ. συν.}}$

(E, ρ)

$\rho : E \times E \to \mathbb{R}$

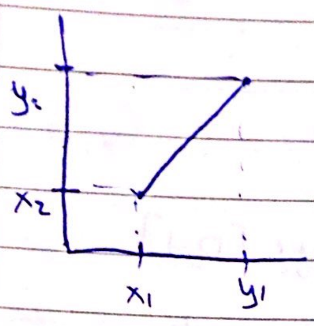
$\rho(x,y) \in \mathbb{R}$

$\rho : (\overbrace{E \times E}^{=E^2}, d) \to (\mathbb{R}, |\,|)$

$\bar{x} = (x_1, x_2)$, $d(\bar{x}, \bar{y}) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$

$\bar{y} = (y_1, y_2)$

$x_i, y_i \in E$



άρα $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\rho^2(x_1, y_1) + \rho^2(x_2, y_2)}$

Θ.δ.ο. η αρχή της μεταφοράς $\Rightarrow$ ομοιομ. συνέχεια

Παίρνω:

$(x_n, y_n) = \bar{a}_n \in E^2 = E \times E$ Τα $\rho(\bar{a}_n)$, $\rho(\bar{\beta}_n)$ ζούν στο $\mathbb{R}$

$(z_n, w_n) = \bar{\beta}_n \in E^2$

$d(\bar{a}_n, \bar{\beta}_n) \to 0$ (υπόθεση)

Συμπέρασμα: $\underbrace{|\rho(\bar{a}_n) - \rho(\bar{\beta}_n)|}_{= S_n} \to 0$

$S_n = |\rho(x_n, y_n) - \rho(z_n, w_n)|$

$d(\bar{a}_n, \bar{b}_n) = d((x_n, y_n), (z_n, w_n)) = \underbrace{\sqrt{\rho^2(x_n, z_n) + \rho^2(y_n, w_n)}} \to 0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \rho(x_n, z_n) \to 0 \\ \text{και} \\ \rho(y_n, w_n) \to 0 \end{cases}$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,z') + \rho(z',y)$

Παρατηρούμε ότι : $|\rho(x_n,y_n) - \rho(z_n,w_n)| \leq \rho(x_n,z_n) + \rho(y_n,w_n) \to 0$

άρα ομοιομ. συνεχής

Άσκηση: $f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$ ομοιομ. συνεχής

$(x_n)_n \subseteq E_1$

ρ_1 - βασική $\Rightarrow$ $(f(x_n))_n$ ρ_2 - βασική

Λύση

$x_n \xrightarrow{f} x_0$, $\rho(x_n, x_0) \to 0$

(x_n) : ρ - βασική

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n,m \geq n_0$

$\lim_{n,m \to \infty} \rho(x_n, x_m) \to 0$